Principe fondamental de la dynamique

I - Principe fondamental de la dynamique en translation

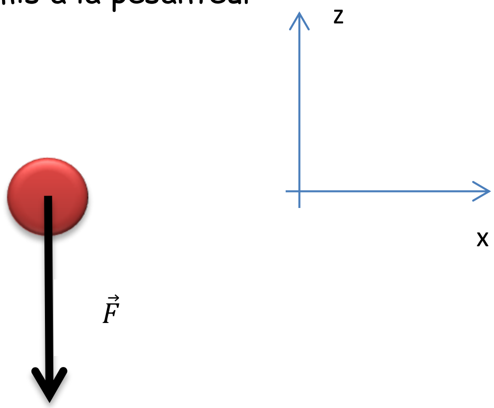
2ième loi : Soit un corps de masse m constante, l'accélération subie par un corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse.

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum \vec{F_i}$$

3ième loi : En statique et en dynamique, les actions mutuelles entre 2 solides sont égales et opposées.

Exemple 1

Solide de masse m soumis à la pesanteur



$F_z = -m.g$

$A_z = -g$

$V_z = -g.t + V_o = -g.t$

$Z = -\frac{g}{2}.t^2 + Z_0 = -\frac{g}{2}.t^2$

Exemple 2 : fusée ariane

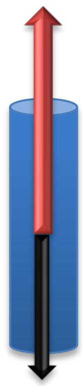
On trouve les caractéristiques suivantes :

Masse au décollage 750 tonnes - Poussée maxi : 14400 kN

Nous allons considérer (bien que ceci soit faux) que la masse de la fusée est constante pendant les premières secondes de vol.

Question quelle sera sa position au bout de 10 s ?

forces appliquées



Poussée = 14400 kN

Poids = -m.g = -750.9,81 =7357 kN

$\vec{a} = \frac{1}{m}\sum \vec{F_i} = \frac{1}{m}(14400000\text{-}7357500) = 9{,}39\ m/s^2$.

Vz = 9,39.t

Z= 9,39/2 .t^2 donc au bout de 10 s Z = 469m

Théorème de la quantité de mouvement

Une forme plus générale du PFD, valable également si la masse change au cours du temps est

La force est égale aux changements de quantité de mouvement par unité de temps.

Ceci est souvent récapitulé dans l'équation :

$$\sum \vec{\mathrm{F}}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

où

- $\vec{\mathrm{F}}_i$ désigne les forces exercées sur l'objet,
- $\vec{p} = m\vec{v}$ est la quantité de mouvement, égale au produit de sa masse m et de sa vitesse $\vec{v}$.

Ce théorème est appelé théorème de la quantité de mouvement. Pour un solide de masse fixe en mécanique newtonienne, il est équivalent à la deuxième loi de Newton.

<u>Exemple 3 : remorque</u>

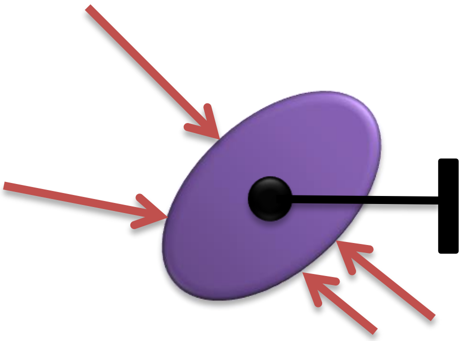
Poids remorque : 300 daN

L'ensemble voiture + remorque atteint la vitesse de 72 km/h en 100m.

Calculer la force de traction exercée par la voiture sur la remorque au niveau de la boule de remorquage.

II – Principe fondamental : solide en rotation

1) Cas où le CDG est sur l'axe de rotation



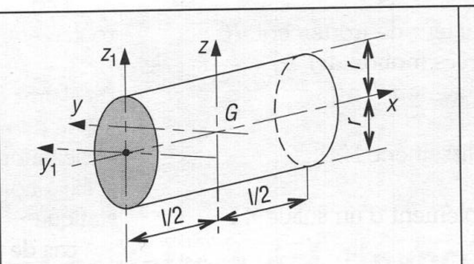
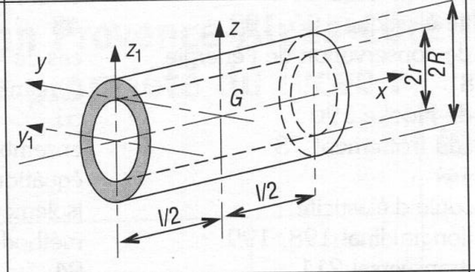
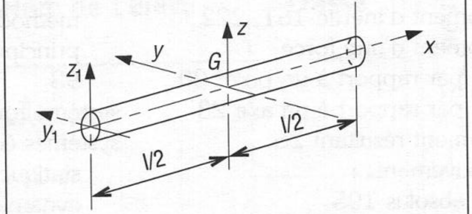
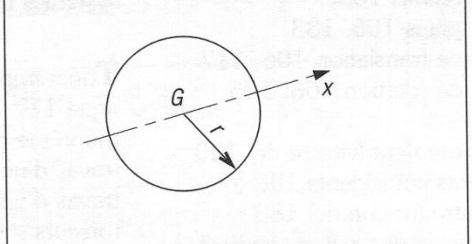
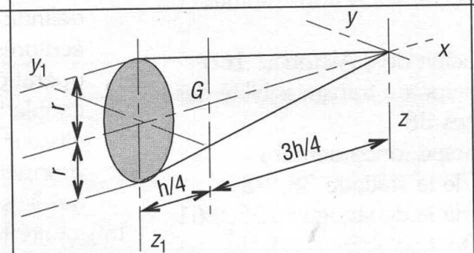
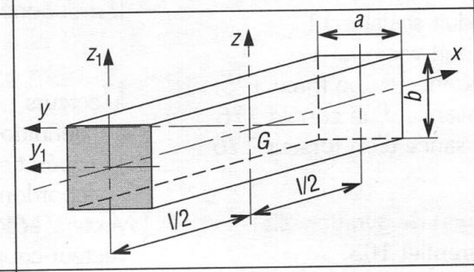
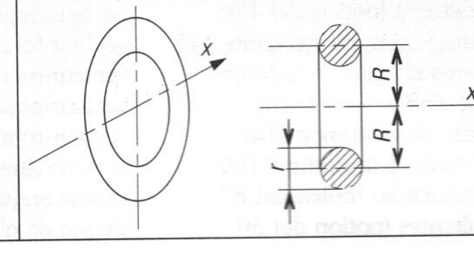
La loi 2 devient :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$$

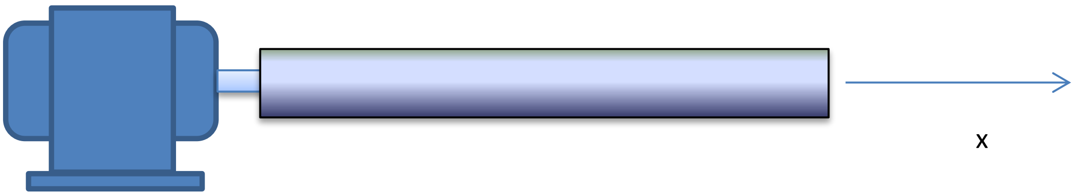
$$\sum M_G(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_G . \propto$$

$\propto$ en rad/s²

J_G en m².kg est le moment d'inertie. Voir le formulaire en page suivante.

Cylindre plein		$J_x = \frac{mr^2}{2}$ $J_z = J_y = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$ $J_{z1} = J_{y1} = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{3}$ m = masse du cylindre $\boxed{\text{volume } V = \pi . r^2 . l}$
Cylindre creux		$J_x = \frac{m\left(R^2 + r^2\right)}{2} \approx m.r_m^2 \quad \left(r_m = \frac{R + r}{2}\right)$ $J_z = J_y = \frac{m\left(R^2 + r^2\right)}{4} + \frac{m.l^2}{12}$ $J_{z1} = J_{y1} = \frac{m\left(R^2 + r^2\right)}{4} + \frac{m.l^2}{3}$
Tige pleine		$J_z = J_y = \frac{m.l^2}{12}$ $J_{z1} = J_{y1} = \frac{m.l^2}{3}$ $J_x = 0$
Sphère		$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mr^2$ $\boxed{V = \frac{4 \pi r^3}{3}}$
Cône plein		$J_x = \frac{3\,mr^2}{10}$ $J_y = J_z = \frac{3\,mr^2}{20} + \frac{3mh^2}{5}$ $J_{y1} = J_{z1} = \frac{3\,mr^2}{20} + \frac{mh^2}{10}$ $\boxed{V = \frac{\pi r^2 h}{3}}$
Parallélé-pipède rectangle		$J_x = \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right)$ $J_y = \frac{m}{12}\left(b^2 + l^2\right) \quad J_{y1} = \frac{mb^2}{12} + \frac{ml^2}{3}$ $J_z = \frac{m}{12}\left(a^2 + l^2\right)$ $\boxed{V = a.b.l}$
Tore		$J_x = \frac{m}{4}\left(4R^2 + 3r^2\right)$ $\boxed{V = 2\pi^2 R\, r^2}$

<u>Exemple 1 : moteur entrainant un axe en acier plein</u>



Diamètre 90mm ; longueur 750 mm

DMS=Singlephase	rated output power	Ratedcurrentat		full-load speed rpm	full-load power factor	full-load efficiency	Starting current I_s/I_N	Starting torque M_s/M_n	Capacitor Running	Capacitor Starting	moment ofinerti a J= $^1/_4GD^2$	Weight foot mounted
	Nenn-Leistung	Nennstrombei		Nenn-drehzahl min^{-1}	Leistungs-faktor	Wirkungs-grad	Anlaufstrom I_a/I_N	Anlauf-moment M_a/M_N	Kondensator Betriebs	Kondensator Anlauf	Trägheits-moment J= $^1/_4GD^2$	Gewicht Fußaus-führung
	Puissance Nominal	Courantnominaleà		Vitesse nominal t/min	Facteurde puissance	Rendement	Courantde démarrage I_d/I_N	Couplede démarrage C_d/C_N	Condensateur Permanent	Condensateur Démarrage	Moment d'inertie J= $^1/_4GD^2$	Masse (moteurà pattes)
framesize Baugröße hauteurd'axe tamañodecarcassa	Potencia Nominal	Intensidadnominal à		Velocidad nominal r/min	Factorde potencia	Rendimiento	Intensidad dearranque I_s/I_N	Parde arranque T_s/T_N	condensador permanente	condensador arranque	Momento deinerci a J= $^1/_4GD^2$	Peso (motor conpatas)
IEC-DIN	P_N kW	220V I_u A	230V I_u A	n_N min^{-1}	cos □	100% □ %			□ F 450V	□ F 240V	kgm^2	kg
DMS-SR 90 S 4	1,10	7,60	7,27	1.430	0,93	71,0	3,6	2,00	25,0	100-125	0,00987	12,3
DMS-SR 90 LA 4	1,50	9,80	9,4	1.420	0,94	74,0	3,8	1,80	31,5	100-125	0,01150	14,7
DMS-SR 90 LB 4	1,80	12,3	11,8	1.400	0,97	68,0	3,3	2,20	36,0	100-125	0,01270	15,5

Moteur DMS-SR 90 S 4

Question : au bout de combien de temps le moteur atteindra-t-il sa vitesse nominale ?

Calcul du moment d'inertie de la barre.

$Jx = m.r^2/2$

$m = \rho.V = \rho.\pi.r^2.l$

$Jx = \rho.\pi.r^2.l.r^2/2 = \rho.\pi.l.r^4/2 = 7800.\pi.0,75.(0,09)^4/2 = 0,603\ m^2kg$

Application de la loi 2

$2 = J_x.\propto$

$\propto = 2/0,603 = 3,32\ rd/s^2$

$$\ddot{\theta} = \alpha$$

$$\dot{\theta} = \sigma.t$$

$$t = \frac{\dot{\theta}}{\alpha} = \frac{1430.\pi}{30.3,32} = 45,1s$$

Exemple 2 : moteur à vide

Question : au bout de combien de temps le moteur atteindra-t-il sa vitesse nominale ?

Application de la loi 2

$2 = J_x . \propto$

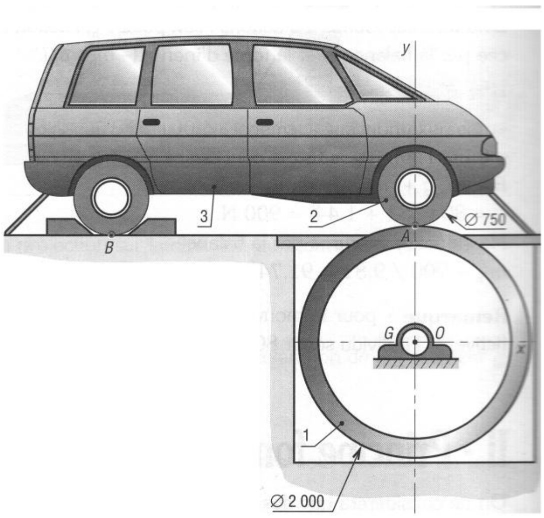
$\propto = 2/0{,}00987 = 202{,}6\ \text{rd/s}^2$

$$\ddot{\theta} = \alpha$$

$$\dot{\theta} = \sigma . t$$

$$t = \frac{\dot{\theta}}{\alpha} = \frac{1430.\pi}{30.202{,}6} = 0{,}74s$$

Exemple 3

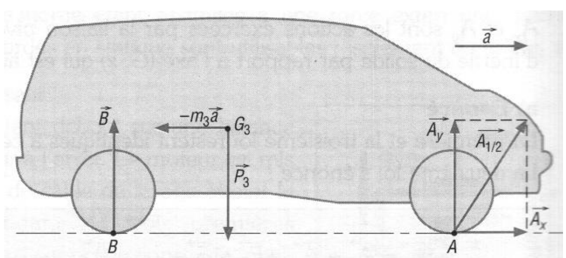


Dans un laboratoire d'essai, pour tester les accélérations d'un véhicule, on utilise un dispositif avec tambour. Les roues motrices sont posées en A sur la partie haute du tambour (rayon $R = 1$ m, longueur 2,5 m, moment d'inertie J_G variable ou ajustable) libre de tourner autour de son axe de rotation (G, z). La masse totale du véhicule en charge est de 2 000 kg. La charge supportée par les roues avant, au repos, est de 1 200 daN.

Quelle doit être la valeur du moment d'inertie J_G pour que le tambour se comporte comme le véhicule au démarrage ou au freinage (accélération tangentielle tambour a_t = accélération du véhicule a) ?

Résolution

a) Isolons le véhicule.



Supposons que l'automobile démarre sur une route horizontale avec une accélération $\vec{a}$.

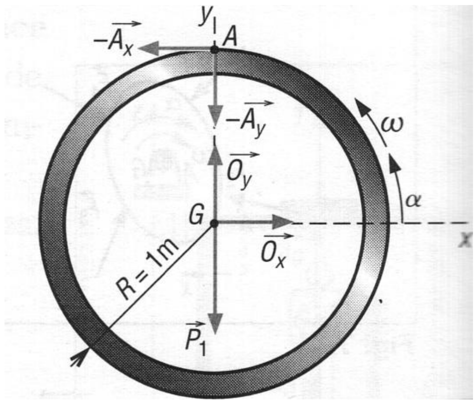
$\overrightarrow{P_3}$ est le poids du véhicule, $\overrightarrow{A_{1/2}}$ et $\vec{B}$ les actions sur les roues.

$-m_3\vec{a}$ la force d'inertie au démarrage.

$$\overrightarrow{P_3} + \vec{B} + \overrightarrow{A_{1/2}} - m_3\vec{a} = \vec{0}$$

Projection sur l'axe x : Ax - m_3a = 0

b) Isolons le tambour.



$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{P1} + \overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy} - \overrightarrow{Ax} - \overrightarrow{Ay} = \vec{0}$$

$$\sum M_G(\overrightarrow{F_{ext}}) = M_G(-\overrightarrow{Ax}) = J_G.\propto$$

Toutes les forces, sauf (-Ax)passent par G et ont un moment nul.

$$M_G\left(-\overrightarrow{Ax}\right) = R.Ax = R.m_3.a = J_G.\propto$$

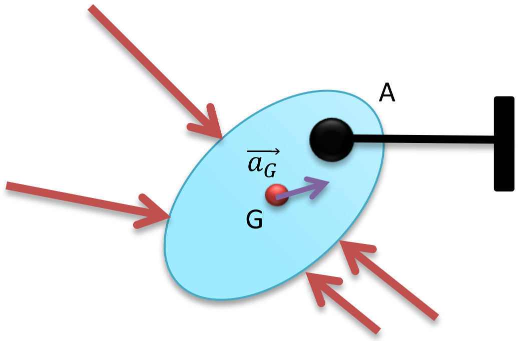
R. $\propto = a$ donc $\propto$ = a/R

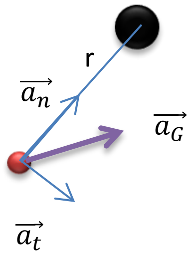
$$R.m_3.a = J_G.\propto = \frac{J_G.a}{R}$$

$$J_G = R^2.m_3$$

d'où J_G = m_3 . R^2 avec m_3 = masse du véhicule.

2) Cas où le CdG n'est pas sur l'axe de rotation





La loi 2 devient :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{Ax} + \overrightarrow{Ay} + \overrightarrow{F1} + \overrightarrow{F2} + \cdots = m.\overrightarrow{a_G}$$

Avec $\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_t}$; $a_n = \omega^2.r$; $a_t = \alpha.r$

$$\sum M_G(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_G.\propto$$

$\propto$ en rad/s²

J_G en m².kg est le moment d'inertie.

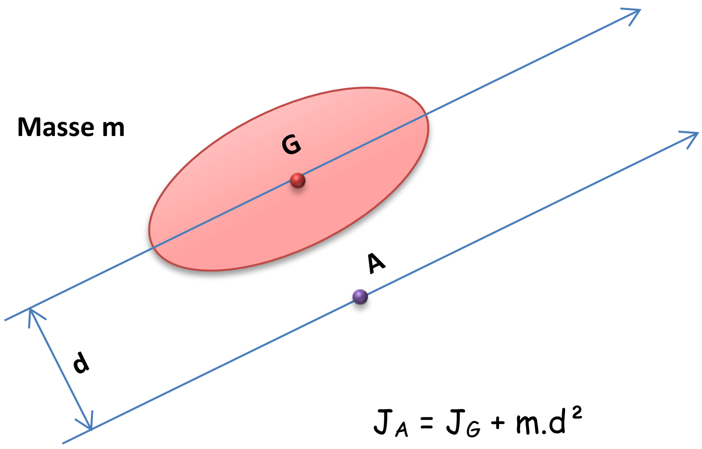
Remarque :

L'équation des moments peut être remplacée par

$$\sum M_A(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_A.\propto$$

Avec $J_A = J_G + m.r^2$

Formule de Huygens (changement d'axe des moments d'inertie)



$J_A = J_G + m.d^2$

Exemple 1 : satellite

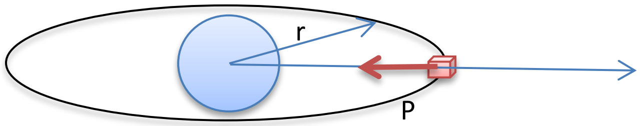
Force d'attraction gravitationnelle :

$$\vec{f}(A) = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u} = m\vec{\mathcal{G}}(A)$$

avec $\vec{u} = \frac{\vec{OA}}{|OA|}$, $|OA| = r$, $G = 6{,}6743.10^{-11}\,\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$

et $\vec{\mathcal{G}}$ le champ gravitationnel

on a donc : $\vec{\mathcal{G}}(A) = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}$



a) Exprimer la vitesse angulaire en fonction de la distance par rapport au centre de la terre.
b) Calculer le temps de révolution d'un satellite qui se trouve à 500 Km d'altitude ?
c) Quel est l'altitude d'un satellite géostationnaire ?

a) $a_n = \omega^2.r \; ; \; a_t = \alpha.r = 0 \; et \; a_n = a_G$

$a_n = \omega^2.r = G\frac{M}{r^2}$ d'où $\omega = \sqrt{G\frac{M}{r^3}}$

b) Rayon de la terre

Circonférence =40000km → R = 40000/2x3.14 = 6366km

9.81 = $\frac{G.M}{R^2}$ d'où GM =R^2.9,81 = 397,56 10^{12}

$$\omega = \sqrt{G\frac{M}{r^3}} = \sqrt{397{,}56\;10^{12}\;\frac{1}{6866000^3}} = 0.0011 rd/s$$

T = $\frac{2.\pi}{0.0011} = 5669s$

c) $\omega_{terre} = \frac{2.\pi}{23{,}93.3600} = 7{,}29.10^{-5}$rd/s

$\omega_{terre} = \sqrt{\frac{G.M}{r^3}}\; d'\text{où}\; r = \sqrt[3]{\frac{G.M}{\omega^2}} = 42212km$

Altitude = 42212-6366 = 35800 km